Universidad Europea	SIMULACRO DE PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen. Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre la puntuación indicada. DURACIÓN: 90 minutos.	

Pregunta A.1.- El planeta Yrelec describe órbitas alrededor de la estrella Torrac. Comparado con Júpiter, el planeta Yrelec tiene una masa 51 veces mayor, pero una órbita de radio 100 veces menor. Además, el periodo de traslación de Yrelec alrededor de su estrella es de 4 días, mientras que el de Júpiter es de 12 años. Considerando ambas órbitas como circulares, calcule:

- **a.** La masa de Torrac.
- **b.** La energía mecánica de Yrelec.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; *Masa del Sol,* $M_S = 1{,}99\cdot10^{30}$ kg; *Masa de Júpiter,* $M_J = 1{,}90\cdot10^{27}$ kg.

Pregunta A.2.- En un día de tormenta, observamos que transcurren 3,5 s desde que vemos un relámpago hasta que escuchamos su trueno asociado. Además, medimos el nivel de intensidad sonora del trueno, siendo de 75 dB. Suponiendo que la descarga eléctrica ha producido una onda sonora esférica, e ignorando reflexiones y otras pérdidas, calcule:

- **a.** La intensidad sonora del trueno en nuestro punto de observación y la distancia desde ahí hasta el punto en el que se ha producido la descarga eléctrica.
- **b.** La potencia sonora total liberada en la descarga.

Datos: Velocidad del sonido en el aire, $v_s = 340$ m s^{-1}; *Intensidad umbral,* $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Pregunta A.3.- Los dos protones de la molécula de H_2 están separado 10^{-10} m.

- **a.** ¿Cuál es el valor de la fuerza eléctrica entre ellos?
- **b.** Considere una situación en la que la molécula de H_2 queda desprovista de todos sus electrones, ¿con qué velocidad se alejarían los dos protones entre sí? Puede asumir que el centro de masas permanece fijo, por lo que los dos protones se mueven con el mismo módulo de velocidad respecto a ese punto.

Datos: Constante de Coulomb, $K = 9\cdot10^{9}$ N m^2 C^{-2}; *Carga del protón,* $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C; *Masa del protón,* $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg.

Pregunta A.4.- Un sistema óptico está formado por dos lentes convergentes, A y B, de distancias focales 4,0 cm y 7,0 cm, respectivamente. La lente B está situada 25 cm a la derecha de A. Se sitúa un objeto de tamaño 2,0 mm a una distancia de 5,0 cm a la izquierda de la lente A.

- **a.** Calcule el tamaño y la posición de la imagen final.
- **b.** Realice un esquema del trazado de rayos de la formación de la imagen.

Pregunta A.5.- El $^{131}_{53}\mathrm{I}$ se desintegra emitiendo una partícula β^-.

- **a.** Escriba la reacción de desintegración de este isótopo radiactivo, determinando razonadamente los números atómico y másico del núcleo resultante $^{A}_{Z}\mathrm{Q}$.
- **b.** Determine la energía liberada al desintegrarse un núcleo de $^{131}_{53}\mathrm{I}$.

Datos: Masa atómica del I, $m(^{131}_{53}\mathrm{I}) = 130{,}906126$ u; *Masa atómica del núcleo resultante,* $m(^{A}_{Z}\mathrm{Q}) = 130{,}905082$ u; *Masa del electrón,* $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg; *Unidad atómica de masa,* $u = 1{,}66\cdot10^{-27}$ kg; *Velocidad de la luz en el vacío,* $c = 3\cdot10^{8}$ m s^{-1}.

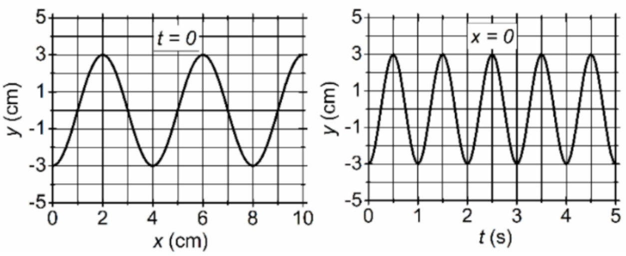
Pregunta B.1.- En el origen de un sistema de referencia cartesiano se sitúa una partícula A, de masa m_A = 1,4 kg. En el eje X de dicho sistema, con x = 2,4 m, se sitúa la partícula B, de masa m_B = 3,1 kg. Finalmente, considere el punto P, situado sobre el eje Y en y = 1,5 m.

a. Determine el campo gravitatorio en P debido a las masas A y B.

b. ¿Qué trabajo habría que realizar para llevar la partícula B hasta una distancia infinita de A, supuesta la posición de esta última fija en el espacio?

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Pregunta B.2.- En la figura se muestran las gráficas de la elongación de una onda armónica transversal propagándose en el sentido positivo del eje X, para t = 0 y para x = 0. Determine:



a. La expresión matemática de la onda.

b. La velocidad de propagación de la onda, y la velocidad de oscilación del punto x = 3,0 cm en t = 1,0 s.

Pregunta B.3.- Un haz de luz monocromática con longitud de onda $\lambda_{aire} = 6\cdot10^{-7}$ m incide desde el aire, con un ángulo de incidencia de 30º, sobre la pared de vidrio plano-paralela de un acuario lleno de agua. Sabiendo que los índices de refracción del aire, el agua y el vidrio son n_{aire} = 1, n_{agua} = 1,33 y n_{vidrio} = 1,50, determine:

a. El ángulo de refracción del haz en el vidrio y en el agua.

b. La longitud de onda del haz en el vidrio y en el agua.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3\cdot10^{8}$ m s^{-1}.

Pregunta B.4.- Por un hilo conductor recto y largo circula una corriente eléctrica de intensidad 3 A. Un electrón viaja con una velocidad de $6\cdot10^5$ m s^{-1} paralelamente al hilo conductor, en el mismo sentido que la corriente, y a 5 cm de este.

a. Determine el campo magnético creado por el hilo en la posición del electrón.

b. Calcule el módulo de la fuerza magnética que actúa sobre el electrón, e indique la dirección de dicha fuerza en un esquema.

Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ T m A^{-1}; *Valor absoluto de la carga del electrón,* $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C.

Pregunta B.5.- Una célula fotoeléctrica de magnesio, cuya longitud de onda umbral es 339 nm, se ilumina con un haz de luz de frecuencia $1{,}0\cdot10^{15}$ Hz.

a. Calcule la energía cinética máxima de los electrones emitidos. Exprese el resultado en eV.

b. En otro experimento se observa que cuando esa célula es iluminada con luz de frecuencia desconocida, los electrones emitidos con energía cinética máxima tienen una longitud de onda de de Broglie de 0,87 nm. Determine la frecuencia de este segundo haz de luz.

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3\cdot10^{8}$ m s^{-1}; *Valor absoluto de la carga del electrón,* $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C; *Constante de Planck,* $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ J s; *Masa del electrón,* $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

FÍSICA

- Las preguntas deben contestarse razonadamente, valorando en su resolución una adecuada estructuración y el rigor en su desarrollo.
- Se valorará positivamente la inclusión de pasos detallados, así como la realización de diagramas, dibujos y esquemas.
- En la corrección de las preguntas se tendrá en cuenta el proceso seguido en la resolución de las mismas, valorándose positivamente la identificación de los principios y leyes físicas involucradas.
- Se valorará la destreza en la obtención de resultados numéricos y el uso correcto de las unidades en el Sistema Internacional.
- Cada pregunta, debidamente justificada y razonada con la solución correcta, se calificará con un máximo de 2 puntos.
- En las preguntas que consten de varios apartados, la calificación máxima será la misma para cada uno de ellos (desglosada en múltiplos de 0,25 puntos).

SOLUCIONES

Pregunta A.1.- El planeta Yrelec describe órbitas alrededor de la estrella Torrac. Comparado con Júpiter, el planeta Yrelec tiene una masa 51 veces mayor, pero una órbita de radio 100 veces menor. Además, el periodo de traslación de Yrelec alrededor de su estrella es de 4 días, mientras que el de Júpiter es de 12 años. Considerando ambas órbitas como circulares, calcule:

a. La masa de Torrac.

b. La energía mecánica de Yrelec.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa del Sol, $M_S = 1{,}99\cdot10^{30}$ kg; Masa de Júpiter, $M_J = 1{,}90\cdot10^{27}$ kg.

Solución:

a. La Tercera Ley de Kepler establece una relación de proporcionalidad entre el cuadrado del periodo orbital y el cubo del radio de la órbita. Para el caso de un órbita circular, podemos obtener la ecuación fácilmente igualando la fuerza gravitatoria a la fuerza centrípeta que actúa sobre el planeta. Llamaremos *M* a la masa de la estrella, *m* a la masa de su planeta, *R* al radio de la órbita, y *T* al periodo:

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} = m\frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R^3 = \frac{GM}{4\pi^2}T^2$$

Esto nos permite expresar la masa de la estrella en función del periodo y radio de la órbita. Si escribimos las relaciones correspondientes para los dos sistemas, Sol-Júpiter y Torrac-Yrelec, y dividimos una entre la otra, obtenemos:

$$\frac{M_{\text{Torrac}}}{M_{\text{Sol}}} = \left(\frac{T_{\text{Júpiter}}}{T_{\text{Yrelec}}}\right)^2 \left(\frac{R_{\text{Yrelec}}}{R_{\text{Júpiter}}}\right)^3 = \left(\frac{365\cdot 12 \text{ días}}{4 \text{ días}}\right)^2 \left(\frac{1}{100}\right)^3 = 1{,}20$$

Sustituyendo el dato de la masa solar, encontramos la masa de la estrella problema:

$$M_{\text{Torrac}} = 1{,}20 M_{\text{Sol}} = 1{,}20(1{,}99\cdot 10^{30}\text{ kg}) = \boxed{2{,}39\cdot 10^{30}\text{ kg}}$$

b. La energía mecánica es suma de energía potencial y cinética. Para la órbita circular viene dada por:

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}$$

El único dato que aún no conocemos es el radio de la órbita de Yrelec, pero lo podemos obtener fácilmente aplicando de nuevo la Tercera Ley de Kepler:

$$R_{\text{Yrelec}} = \sqrt[3]{\frac{GM_{\text{Torrac}}}{4\pi^2}T_{\text{Yrelec}}^2} = 7{,}84\cdot 10^9\text{ m}$$

Finalmente,

$$E = -\frac{1}{2}(6{,}67\cdot 10^{-11}\text{ N m}^2\text{ kg}^{-2})\frac{(2{,}39\cdot 10^{30}\text{ kg})(51\cdot 1{,}90\cdot 10^{27}\text{ kg})}{(7{,}84\cdot 10^9\text{ m})} = \boxed{-9{,}84\cdot 10^{38}\text{ J}}$$

Pregunta A.2.- En un día de tormenta, observamos que transcurren 3,5 s desde que vemos un relámpago hasta que escuchamos su trueno asociado. Además, medimos el nivel de intensidad sonora del trueno, siendo de 75 dB. Suponiendo que la descarga eléctrica ha producido una onda sonora esférica, e ignorando reflexiones y otras pérdidas, calcule:

a. La intensidad sonora del trueno en nuestro punto de observación y la distancia desde ahí hasta el punto en el que se ha producido la descarga eléctrica.

b. La potencia sonora total liberada en la descarga.

Datos: Velocidad del sonido en el aire, v_s = 340 m s^{-1}*; Intensidad umbral, I_0 = 10^{-12}* W m^{-2}.

Solución:

a. Asumiendo que la velocidad del sonido en el aire es constante, y que el tiempo que necesita la luz para llegar a nuestra posición es despreciable, la distancia *r* se obtiene inmediatamente:

$$v_s = \frac{\Delta r}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad r = v_s \Delta t = (340\ \mathrm{m\ s^{-1}})(3{,}5\ \mathrm{s}) = \boxed{1{,}19 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}$$

La intensidad acústica correspondiente al punto de observación se obtiene a partir de la definición de decibelio:

$$\beta = (10\ \mathrm{dB}) \log \frac{I}{I_0} \qquad \Rightarrow \qquad I = I_0 10^{\beta/10} = (10^{-12}\ \mathrm{W\ m^{-2}}) 10^{75/10} = \boxed{3{,}16 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W\ m^{-2}}}$$

b. En las condiciones dadas, la potencia sonora liberada en la fuente se distribuye uniformemente por la superficie de una esfera de radio *r*. Por tanto:

$$I = \frac{P}{4\pi\, r^2} \qquad \Rightarrow \qquad P = I\, 4\pi\, r^2 = (3{,}16 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W\ m^{-2}}) 4\pi\, (1{,}19 \cdot 10^3\ \mathrm{m})^2 = \boxed{562\ \mathrm{W}}$$

Pregunta A.3.- Los dos protones de la molécula de H_2 están separado 10^{-10} m.

a. ¿Cuál es el valor de la fuerza eléctrica entre ellos?

b. Considere una situación en la que la molécula de H_2 queda desprovista de todos sus electrones, ¿con qué velocidad máxima se alejarían los dos protones entre sí? Puede asumir que el centro de masas permanece fijo, desde donde los dos protones se alejan con el mismo módulo de velocidad.

Datos: Constante de Coulomb, $K = 9{\cdot}10^{9}$ N m^2 C^{-2}; Carga del protón, $e = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ C; Masa del protón, $m_p = 1{,}67{\cdot}10^{-27}$ kg.

Solución:

a. La interacción electrostática entre partículas cargadas viene dada por la Ley de Coulomb. Para dos cargas iguales q, separadas una distancia r, la fuerza es repulsiva y de módulo:

$$\left|\vec{F}\right| = K\frac{q^2}{r^2} = (9\cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}})\frac{(1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(10^{-10}\ \mathrm{m})^2} = \boxed{2{,}3\cdot 10^{-8}\ \mathrm{N}}$$

b. La velocidad con la que se mueven los protones no es constante, está siempre aumentando (en módulo), pero con una aceleración cada vez menor. La mejor manera de estudiar la velocidad límite (aquella que tendrían en el límite de distancia infinita) es mediante conservación de la energía mecánica. El trabajo realizado por el campo eléctrico se emplea en variar la energía cinética de la partícula. Debido a la simetría del problema, y con la condición indicada en el enunciado, podemos decir que a cada protón le corresponde la mitad de la energía potencial inicial (con el signo opuesto, puesto que el trabajo realizado por el campo conservativo es menos la variación de energía potencial). Por tanto, la energía cinética de cada protón a distancia infinita será:

$$E_{C,\,\mathrm{protón}} = -\frac{\Delta E_P}{2} = K\frac{q^2}{2r} = (9\cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}})\frac{(1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{2(10^{-10}\ \mathrm{m})} = 1{,}15\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

Si llamamos *v* al módulo de la velocidad del protón respecto del centro de masas, supuesto fijo, entonces:

$$E_{C,\,\mathrm{protón}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\,E_{C,\,\mathrm{protón}}}{m}} = \sqrt{\frac{2(1{,}15\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J})}{(1{,}67\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})}} = 3{,}71\cdot 10^4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

El problema nos pide la *velocidad con la que se alejan entre sí*, es decir, el doble de la velocidad calculada arriba:

$$v_{\mathrm{relativa}} = 2v = 2(3{,}71\cdot 10^4\ \mathrm{m\,s^{-1}}) = \boxed{7{,}43\cdot 10^4\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

Pregunta A.4.- Un sistema óptico está formado por dos lentes convergentes, A y B, de distancias focales 4,0 cm y 7,0 cm, respectivamente. La lente B está situada 25 cm a la derecha de A. Se sitúa un objeto de tamaño 2,0 mm a una distancia de 5,0 cm a la izquierda de la lente A, sobre el mismo eje óptico formado por las lentes A y B.

a. Calcule el tamaño y la posición de la imagen final.

b. Realice un esquema del trazado de rayos de la formación de la imagen.

Solución:

a. En este sistema óptico, la imagen formada por la lente A actuará como objeto de la lente B. Por ello, primero debemos calcular la posición y tamaño de la imagen del objeto a través de A. Utilizando la ecuación de las lentes delgadas, con el criterio de signos habitual (son distancias positivas las medidas en la dirección de avance de la luz, de izquierda a derecha en este caso), tenemos la posición de la imagen generada por la primera lente:

$$\frac{1}{f'_A} = \frac{1}{s'_A} - \frac{1}{s_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(4{,}0\ \mathrm{cm})} = \frac{1}{s'_A} - \frac{1}{(-5{,}0\ \mathrm{cm})} \quad \Rightarrow \quad s'_A = 20\ \mathrm{cm}$$

El tamaño de la imagen se obtiene de la ecuación del aumento lateral:

$$\frac{y'_A}{y_A} = \frac{s'_A}{s_A} \quad \Rightarrow \quad y'_A = (2{,}0\ \mathrm{mm})\frac{(20\ \mathrm{cm})}{(-5{,}0\ \mathrm{cm})} = -8{,}0\ \mathrm{mm}$$

De forma similar, calculamos posición y tamaño de la imagen a través de la lente B. Para la distancia objeto a la lente B, téngase en cuenta que la separación entre las lentes es 25 cm, por tanto $s_B = (20\ \mathrm{cm} - 25\ \mathrm{cm}) = -5{,}0\ \mathrm{cm}$.

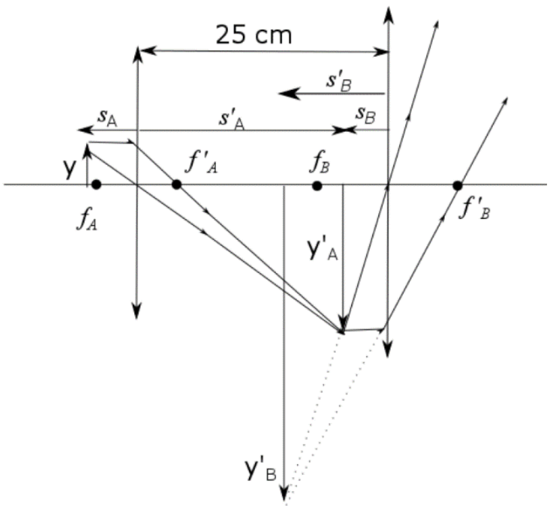
$$\frac{1}{f'_B} = \frac{1}{s'_B} - \frac{1}{s_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(7{,}0\ \mathrm{cm})} = \frac{1}{s'_B} - \frac{1}{(-5{,}0\ \mathrm{cm})} \quad \Rightarrow \quad s'_A = \boxed{-17{,}5\ \mathrm{cm}}$$

$$\frac{y'_B}{y_B} = \frac{s'_B}{s_B} \quad \Rightarrow \quad y'_B = (-8{,}0\ \mathrm{mm})\frac{(17{,}5\ \mathrm{cm})}{(-5{,}0\ \mathrm{cm})} = \boxed{-28\ \mathrm{mm}}$$

b. Para el esquema de rayos se aconseja trazar, al menos, dos rayos que parten del extremo del objeto:

- Un rayo paralelo al eje óptico que, en una lente convergente como estas, pasará por el foco (real). En una lente divergente, sería la prolongación del rayo la que pasaría por el foco (virtual).
- Un rayo dirigido al centro óptico de la lente, que no se ve desviado.

El punto de corte de estos dos rayos (o de sus prolongaciones) nos da la posición de la imagen.



Pregunta A.5.- El $^{131}_{53}\mathrm{I}$ se desintegra emitiendo una partícula β^-.

a. Escriba la reacción de desintegración de este isótopo radiactivo, determinando razonadamente los números atómico y másico del núcleo resultante $^{A}_{Z}\mathrm{Q}$.

b. Determine la energía liberada al desintegrarse un núcleo de $^{131}_{53}\mathrm{I}$.

Datos: Masa atómica del I, m($^{131}_{53}\mathrm{I}$) = 130,906126 u*; Masa atómica del núcleo resultante, m($^{A}_{Z}\mathrm{Q}$) = 130,905082* u*; Masa del electrón, m_e = 9,11·10^{-31}* kg*; Unidad atómica de masa, u = 1,66·10^{-27}* kg*; Velocidad de la luz en el vacío, c = 3·10^{8}* m s^{-1}.

Solución:

a. La desintegración β^- consiste en la transformación de un neutrón en un protón, junto con la emisión de un electrón (en el proceso también se emite un antineutrino, una partícula sin carga ni masa que podemos ignorar en este análisis). Por tanto, el número másico no se ve afectado, pero el número atómico aumenta en una unidad (este resultado también se conoce como Segunda Ley de Desplazamiento de Soddy). La reacción puede escribirse de la siguiente forma:

$$\boxed{^{131}_{53}\mathrm{I} \rightarrow {}^{131}_{54}\mathrm{Q} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}}$$

No es necesario en este ejercicio, pero se puede indicar que el núcleo resultante es de Xe.

b. La masa combinada de los productos es, en general, inferior a la de los reactivos. Con los datos dados, el defecto de masa es:

$$\Delta m = m(^{131}_{54}\mathrm{Q}) + m_e - m(^{131}_{53}\mathrm{I}) =$$
$$= (1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})(130{,}905082 - 130{,}906126) + (9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}) =$$
$$= -8{,}22 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

Este defecto de masa corresponde a la energía liberada en la reacción, según la Ley de equivalencia entre masa y energía de Einstein:

$$E_{\mathrm{liberada}} = -\Delta m\, c^2 = (8{,}22 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg})(3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m\ s^{-1}})^2 = \boxed{7{,}40 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J}}$$

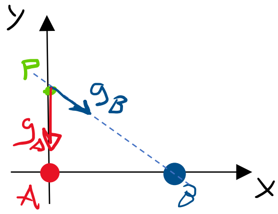
Pregunta B.1.- En el origen de un sistema de referencia cartesiano se sitúa una partícula A, de masa m_A = 1,4 kg. En el eje X de dicho sistema, con x = 2,4 m, se sitúa la partícula B, de masa m_B = 3,1 kg. Finalmente, considere el punto P, situado sobre el eje Y en y = 1,5 m.

- **a.** Determine el campo gravitatorio en P debido a las masas A y B.
- **b.** ¿Qué trabajo habría que realizar para llevar la partícula B hasta una distancia infinita de A, supuesta la posición de esta última fija en el espacio?

Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10⁻¹¹ N m² kg⁻².

Solución:

a. En la figura se muestran el punto P y las masas A y B. Cada una de ellas produce en el punto P una contribución al campo gravitatorio dirigido hacia ella y cuyo módulo viene dado por la Ley de la Gravitación Universal de Newton:



$$g_A = G\frac{m_A}{{r_A}^2} = (6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}})\frac{(1{,}4\ \mathrm{kg})}{(1{,}5\ \mathrm{m})^2} = 4{,}15 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,kg^{-1}}$$

$$g_B = G\frac{m_B}{{r_B}^2} = (6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}})\frac{(3{,}1\ \mathrm{kg})}{(1{,}5\ \mathrm{m})^2 + (2{,}4\ \mathrm{m})^2} = 2{,}58 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,kg^{-1}}$$

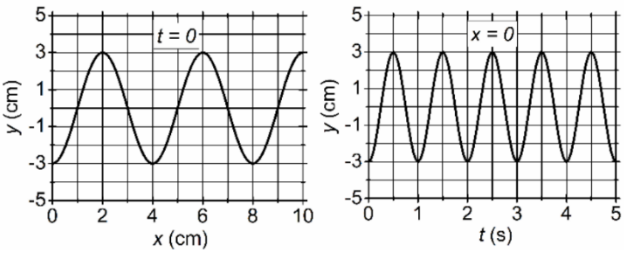
Para calcular la distancia de P a la masa B se ha utilizado el Teorema de Pitágoras. Finalmente, el campo total es la suma vectorial de las dos contribuciones, lo que puede hacerse geométrica o algebraicamente. En unidades de 10^{-11} N kg^{-1}, tenemos:

$$\left.\begin{aligned}\vec{g}_A &= -4{,}15\,\hat{\jmath}\\ \vec{g}_B &= 2{,}18\,\hat{\imath} - 1{,}37\hat{\jmath}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B = \boxed{(2{,}19\,\hat{\imath} - 5{,}52\,\hat{\jmath}) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,kg^{-1}}}$$

b. Al ser conservativa la fuerza gravitatoria, el trabajo realizado por una fuerza externa para separar las masas una distancia infinita es igual al cambio de energía potencial. Como la energía potencial a distancia infinita es nula, el trabajo pedido es menos la energía potencial inicial:

$$W = \Delta E_P = -E_{P,0} = G\frac{m_A m_B}{r_{AB}} = (6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}})\frac{(1{,}4\ \mathrm{kg})(3{,}1\ \mathrm{kg})}{(2{,}4\ \mathrm{m})} = \boxed{1{,}21 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J}}$$

Pregunta B.2.- En la figura se muestran las gráficas de la elongación de una onda armónica transversal propagándose en el sentido positivo del eje X, para t = 0 y para x = 0. Determine:



- **a.** La expresión matemática de la onda.
- **b.** La velocidad de propagación de la onda, y la velocidad de oscilación del punto x = 3,0 cm en t = 1,0 s.

Solución:

a. Una de las formas matemáticas de expresar la onda es:

$$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi\right)$$

Donde A es la amplitud, T el periodo de oscilación, λ la longitud de onda, y φ una constante que determina la fase inicial. El periodo T = 1 s se obtiene inspeccionando la gráfica de elongación a posición constante, la longitud de onda λ = 4 cm de la gráfica a tiempo constante, y la amplitud A = 3 cm de cualquiera de las dos. Con esto tenemos:

$$\boxed{y(x,t) = 3\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}x + \phi\right)}$$

Donde las longitudes se expresan en centímetros y el tiempo en segundos. Tan sólo nos falta determinar la constante de fase. Se podría utilizar cualquier punto conocido, siendo el más sencillo $y(0,0) = -3\text{ cm}$. Esto nos da $\cos\phi = -1$, cuya solución más simple es $\boxed{\phi = \pi\text{ rad}}$.

b. La velocidad de propagación es el cociente entre longitud de onda y periodo:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{(4\text{ cm})}{(1\text{ s})} = \boxed{4\text{ cm s}^{-1}}$$

Para obtener la velocidad de vibración debemos derivar la expresión matemática de la elongación de la onda respecto al tiempo:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}3\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}x + \pi\right) = -6\pi\,\text{sen}\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}x + \pi\right)$$

Y sustituir los valores de posición y tiempo indicados:

$$v_y(x=3, t=1) = -6\pi\,\text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{2}3 + \pi\right) = -6\pi\,sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 6\pi\text{ cm s}^{-1} = \boxed{18{,}9\text{ cm s}^{-1}}$$

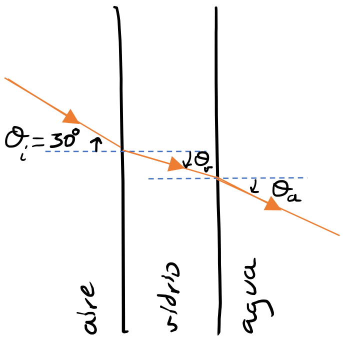
Pregunta B.3.- Un haz de luz monocromática con longitud de onda λ_{aire} = $6 \cdot 10^{-7}$ m incide desde el aire, con un ángulo de incidencia de 30º, sobre la pared de vidrio plano-paralela de un acuario lleno de agua. Sabiendo que los índices de refracción del aire, el agua y el vidrio son n_{aire} = 1, n_{agua} = 1,33 y n_{vidrio} = 1,50, determine:

a. El ángulo de refracción del haz en el vidrio y en el agua.

b. La longitud de onda y la frecuencia del haz en el agua.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío, c = $3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

Solución:



a. La refracción de la luz al incidir en la interfaz entre dos medios, 1 y 2, obedece la Ley de Snell:

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

Donde *n* es el índice de refracción del medio y los ángulos se miden respecto a la dirección normal a la interfaz. Con los datos del problema calculamos directamente el ángulo de refracción en el vidrio, θ_v:

$$n_{\text{aire}} \operatorname{sen} \theta_i = n_{\text{vidrio}} \operatorname{sen} \theta_v \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 30° = 1{,}50 \operatorname{sen} \theta_v \quad \Rightarrow \boxed{\theta_v = 19{,}5°}$$

Para la segunda refracción debemos observar que el ángulo de incidencia en la interfaz vidrio-agua es igual al ángulo de refracción en la interfaz aire-vidrio. Aplicando de nuevo la Ley de Snell, obtenemos:

$$n_{\text{vidrio}} \operatorname{sen} \theta_v = n_{\text{agua}} \operatorname{sen} \theta_a \quad \Rightarrow \quad 1{,}50 \operatorname{sen} 19{,}5° = 1{,}33 \operatorname{sen} \theta_a \quad \Rightarrow \boxed{\theta_a = 22{,}1°}$$

Obsérvese que, si únicamente hubiésemos estado interesados en el ángulo de refracción en el agua, podíamos haber aplicado la Ley de Snell directamente a una hipotética interfaz aire-agua.

b. La frecuencia de la luz, *f*, es independiente del medio de transmisión, pero no así la longitud de onda, *λ*, ni la velocidad de propagación, *v*. Podemos calcular la frecuencia a partir de los datos del haz incidente, ya que el aire se comporta como el vacío por tener índice de refracción unidad:

$$v = \lambda f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{v_{\text{aire}}}{\lambda_{\text{aire}}} = \frac{c}{\lambda_{\text{aire}}} = \frac{(3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})}{(6 \cdot 10^{-7} \text{ m})} = \boxed{5{,}0 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$$

Para la longitud de onda en el agua, utilizamos que la velocidad de propagación de la luz es n veces inferior a la que tendría en el vacío:

$$\lambda_{\text{agua}} = \frac{v_{\text{agua}}}{f} = \frac{c}{n_{\text{agua}} f} = \frac{\lambda_{\text{aire}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{(6 \cdot 10^{-7} \text{ m})}{1{,}33} = \boxed{4{,}51 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$$

Pregunta B.4.- Por un hilo conductor recto y largo circula una corriente eléctrica de intensidad 3 A. Un electrón viaja con una velocidad de $6 \cdot 10^5$ m s^{-1} paralelamente al hilo conductor, en el mismo sentido que la corriente, y a 5 cm del mismo.

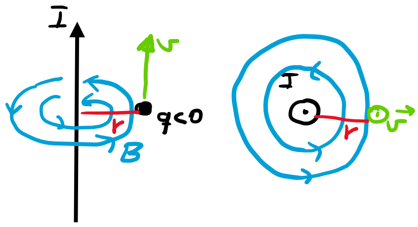
a. Determine el campo magnético creado por el hilo en la posición del electrón.

b. Calcule el módulo de la fuerza magnética que actúa sobre el electrón, e indique la dirección de dicha fuerza en un esquema.

Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m A^{-1}*; Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$* C.

Solución:

a. En la figura se muestran dos vistas de la situación, con el hilo conductor, el campo magnético creado y la velocidad inicial del electrón. El valor del campo magnético puede obtenerse aplicando la Ley de Ampère a la circunferencia coincidente con la línea de campo que pasa por la posición del electrón:

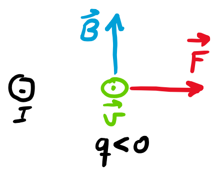


$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi\, r = \mu_0 I \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r}$$

Sustituyendo los valores dados, se obtiene:

$$B = \frac{(4\pi\, 10^{-7}\mathrm{T\ m\ A^{-1}})(3\ \mathrm{A})}{2\pi\ (5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})} = \boxed{1{,}20 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}}$$

b. La fuerza magnética viene dada por la Ley de Lorentz. Para la dirección y sentido, aplíquese la regla de la mano derecha y téngase en cuenta que la carga del electrón es negativa.



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Vemos que el electrón tiende a alejarse del hilo conductor. Al ser perpendiculares los vectores velocidad y campo magnético, el módulo de la fuerza es simplemente el producto de los módulos:

$$F = |qvB| = (1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})(6 \cdot 10^5 \mathrm{m\ s^{-1}})(1{,}20 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}) = \boxed{1{,}15 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{N}}$$

Pregunta B.5.- Una célula fotoeléctrica de magnesio, cuya longitud de onda umbral es 339 nm, se ilumina con un haz de luz de frecuencia $1{,}0\cdot10^{15}$ Hz.

a. Calcule la energía cinética máxima de los electrones emitidos. Exprese el resultado en eV.

b. En otro experimento se observa que cuando esa célula es iluminada con luz de frecuencia desconocida, los electrones emitidos con energía cinética máxima tienen una longitud de onda de de Broglie de 0,87 nm. Determine la frecuencia de este segundo haz de luz.

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C; Constante de Planck, $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ J s; Masa del electrón, $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg.

Solución:

a. Primero debemos hallar la energía correspondiente a la longitud de onda umbral. Expresaremos el resultado en eV dividiendo entre la carga del electrón.

$$E_{\text{umbral}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\ \text{J s})(3\cdot10^{8}\ \text{m s}^{-1})}{(339\cdot10^{-9}\ \text{m})} = 5{,}87\cdot10^{-19}\ \text{J} = 3{,}67\ \text{eV}$$

A continuación, calculamos la energía de los fotones incidentes, de nuevo expresada en electrón-voltios.

$$E_{\text{fotón}} = hf = (6{,}63\cdot10^{-34}\ \text{J s})(1{,}0\cdot10^{15}\ \text{Hz}) = 6{,}63\cdot10^{-19}\ \text{J} = 4{,}14\ \text{eV}$$

Vemos que, efectivamente, la energía de los fotones es mayor que la energía de corte, por lo que se produce efecto fotoeléctrico. La diferencia de energía corresponde a la energía cinética máxima que pueden tener los electrones emitidos:

$$E_{\text{electrón, máxima}} = E_{\text{fotón}} - E_{\text{umbral}} = (4{,}14\ \text{eV}) - (3{,}57\ \text{eV}) = \boxed{0{,}47\ \text{eV}}$$

b. La solución a este apartado reproduce la del apartado anterior, pero invirtiendo el orden: partimos de la energía cinética máxima de los electrones emitidos y, tras sumar el trabajo de extracción, obtenemos la energía de los fotones incidentes.

En primer lugar, calculamos la velocidad (asumida no relativista) de los electrones a partir de su longitud de onda de de Broglie asociada:

$$\lambda_{\text{deBroglie}} = \frac{h}{mv} \quad\Rightarrow\quad v = \frac{h}{m\lambda_{\text{deBroglie}}}\frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\ \text{J s})}{(9{,}1\cdot10^{-31}\ \text{kg})(0{,}87\cdot10^{-9}\ \text{m})} = 8{,}37\cdot10^{5}\ \text{m s}^{-1}$$

A continuación, calculamos la energía cinética de los electrones emitidos:

$$E_{\text{electrón}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(9{,}1\cdot10^{-31}\ \text{kg})(8{,}37\cdot10^{5}\ \text{m s}^{-1})^2 = 3{,}19\cdot10^{-19}\ \text{J}$$

Para calcular la energía de los fotones incidentes, sumamos a este valor la energía umbral. Finalmente, calculamos la frecuencia de dichos fotones:

$$E_{\text{fotón}} = E_{\text{electrón}} + E_{\text{umbral}} = (5{,}87\cdot10^{-19}\ \text{J}) + (3{,}19\cdot10^{-19}\ \text{J}) = 9{,}05\cdot10^{-19}\ \text{J}$$

$$f = \frac{E_{\text{fotón}}}{h} = \frac{(9{,}05\cdot10^{-19}\ \text{J})}{(6{,}63\cdot10^{-34}\ \text{J s})} = \boxed{1{,}37\cdot10^{15}\ \text{Hz}}$$